Optisk kuriositet: Er fotonen polykromatisk?

Torben Skettrup
Institut for Fysik
Danmarks Tekniske Universitet
DK-2800 Kgs. Lyngby
Tel: 4525 3343, FAX 4593 1669, e-mail: ts@fysik.dtu.dk

Inspireret af den interessante og udmærkede artikel af Jacob Broe og Ole Keller[1] om fotonen i sidste udgave af DOPS-NYT, hvor det nævnes, at fotonen, når den fødes nødvendigvis må være polykromatisk (altså indeholde mere end én frekvens), skal der i denne optiske kuriositet vises en simpel beregning baseret på klassisk teori, der kan give en forståelse af dette.

Fotonen defineres egentligt i kvanteoptikken ved at kvantisere f.eks. stående lysbølger i et hulrum. Da disse stående bølger er monokromatiske, bliver fotonen automatisk også monokromatisk. Som det påpeges i Ref. 1 fødes fotonen imidlertid i et tidsrum mellem overgangen fra et energiniveau i et emitterende atom til et andet energiniveau. På grund af denne endelige tid Δt vil der i følge ubestemthedsprincippet, (som blot er en konsekvens af teorien for Fouriertransformation), mindst være en frekvensudbredning $\Delta\omega \cong 1/\Delta t$. Fotonen fødes altså indenfor et vist tidsrum og har derfor et frekvensindhold, der gør, at den ikke er monokromatisk, når den dannes.

I det følgende gives en halvklassisk beregning, der viser, hvor stort et frekvensindhold fotonen har, når den udsendes fra et atom. Der betragtes et simpelt atom (f.eks. et hydrogen atom) med en elektron i en bane omkring kernen i dette atom. Elektronen skal betragtes som en partikel med en ledsagende (materie)bølge med en bølgelængde λ, der er givet ved de-Broglie relationen:

$$p = \frac{h}{\lambda}, \tag{1}$$

hvor p er elektronens impuls, og h er Plancks konstant. Betragtes en simpel cirkelbevægelse, som i den simple Bohr-model for et hydrogen atom, og benyttes Newtons anden lov (masse gange acceleration = elektrisk tiltrækning mellem elektron og kerne), fås

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o r^2}, \tag{2}$$

hvor m og e er elektronmasse og -ladning, og r og v er baneradius og elektronhastighed i banen om kernen, mens ε_o er vakuumpermittiviteten. Indføres E som den totale energi, dvs. summen af kinetisk og potentiel energi, finder man efter lidt regning:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_o r}, \qquad & r &= \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_o |E|}, \\ v &= \sqrt{\frac{2|E|}{m}}, \qquad & \omega &= \frac{8\pi\varepsilon_o}{e^2}\sqrt{\frac{2|E|^3}{m}} \end{aligned} \tag{3}$$

hvor ω er elektronens omløbsfrekvens om kernen i radianer pr. sek. Idet $p = mv$ fås ved at benytte de-Broglie relationen i (1):

$$\begin{aligned} E &= -\frac{h^2}{2m\lambda^2}, \qquad & r &= \frac{me^2}{4\pi\varepsilon_o h^2}\lambda^2, \\ v &= \frac{h}{m\lambda}, \qquad & \omega &= \frac{4\pi\varepsilon_o h^3}{m^2 e^2}\frac{1}{\lambda^3}. \end{aligned} \tag{4}$$

De stationære baner i atomet fås, når den ledsagende materiebølge er stående, dvs. når:

$$2\pi r = n\lambda, \tag{5}$$

hvor n er et heltal. Indsættes (5) i (3) og (4), fås de sædvanlige Rydberg-energiniveauer direkte:

$$E_n = \frac{E_1}{n^2}, \qquad E_1 = -\frac{1}{2}\frac{me^4}{(2\varepsilon_o h)^2}, \qquad v_n = \sqrt{\frac{2|E_1|}{m}}\frac{1}{n}, \tag{6}$$

hvor udtrykket for v_n skal benyttes i det følgende. Når elektronen er i en stationær bane (tilstand), bevæger den sig faktisk ikke, fordi dens ledsagende bølge, som bestemmer dens bevægelse, er stående. Når elektronen overgår fra én stationær tilstand til den nærmest underliggende, bevæger den sig stort set som en klassisk partikel, der spiraliserer ind mod kernen, fordi den taber energi ved at udsende elektromagnetisk stråling, da elektronladningen er underkastet acceleration i dens banebevægelse rundt om kernen. Man kan sige, at atomet virker som en lille antenne, der udsender en cirkulært polariseret elektromagnetisk bølge med samme frekvens som elektronens omløbsfrekvens ω (se lign.(3) eller (4)). Hvis overgangen sker fra niveau n+1 til niveau n, vil det udsendte elektromagnetiske felt, som jo i denne simple klassiske fortolkning netop udgør fotonen, bestå af frekvenser i intervallet $\omega_{n+1} < \omega < \omega_n$, og derfor ikke være monokromatisk. Middelfrekvensen af den udsendte foton fås ved en simpel middelværdiudregning af udtrykket for ω i (4)

$$\langle\omega\rangle = \frac{1}{\omega_{n+1}-\omega_n}\int_{\omega_{n+1}}^{\omega_n}\omega d\omega, \tag{7}$$

eller

$$\begin{aligned}\langle\omega\rangle &= \frac{1}{\lambda_n-\lambda_{n+1}}\left(\frac{4\pi\varepsilon_o h^3}{m^2e^2}\right)\int_{\lambda_{n+1}}^{\lambda_n}\frac{d\lambda}{\lambda^3} \\ &= \frac{C}{2}\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}^2}-\frac{1}{\lambda_n^2}\right),\end{aligned} \tag{8}$$

hvor

$$C = \frac{1}{\lambda_n-\lambda_{n+1}}\left(\frac{4\pi\varepsilon_o h^3}{m^2e^2}\right). \tag{9}$$

Den udsendte foton kan altså betragtes som en bølgepakke med en gennemsnitsfrekvens givet ved (8). En bølgepakke beskrives som bekendt matematisk som en bølge, hvis frekvens er lig gennemsnitsfrekvensen af bølgepakkens frekvensindhold, multipliceret med en indhyllingskurve, som bestemmer længden af bølgepakken. Der kan også gives en simpel beregning af bølgepakkens længde ud fra disse klassiske betragtninger, idet den energi, der tabes pr. tidsenhed på grund af udstråling er givet ved

$$W = \frac{d(-E)}{dt} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{g^2}{c^3} = \frac{32}{3}\frac{4\pi\varepsilon_o(-E)^4}{e^2m^2c^3}, \tag{10}$$

hvor g er elektronens acceleration, og c er lyshastigheden i vakuum. Hvis man her indfører λ fra (4) og integrerer, kan man udregne, hvor lang tid, det tager for elektronen at løbe fra niveau n+1 til niveau n

$$t_n - t_{n+1} = \frac{\hbar}{8|E_1|\alpha^3}\left[(n+1)^6 - n^6\right], \tag{11}$$

hvor

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o\hbar c}, \tag{12}$$

er den såkaldte finstrukturkonstant. For $n = 2 \rightarrow 1$ for H-atomet er denne tid f.eks. ca. 10^{-9} sek, svarende til ca. 30 cm bølgepakkelængde indeholdende omkring $3{\cdot}10^6$ oscillationsperioder. Denne simple model udsiger altså, at den udsendte elektromagnetiske bølge (fotonen) er cirkulært polariseret og har en frekvens, der varierer fra ω_{n+1} til ω_n, altså er polykromatisk, men med en gennemsnitsfrekvens givet i (8).

Et andet interessant resultat, som kommer fra denne simple klassiske model er, at Bohr's postulat

$$\omega = 2\pi\frac{E_{n+1}-E_n}{h}, \tag{13}$$

hvor ω er vinkelfrekvensen af det udsendte lys, faktisk kan udledes, dog med den modifikation, at ω skal erstattes med $\langle\omega\rangle$ i (8). Fra (1) og (6) fås

$$\lambda_n - \lambda_{n+1} = \frac{h}{mv_n} - \frac{h}{mv_{n+1}} = -\frac{h}{\sqrt{2m|E_1|}}. \tag{14}$$

Indsættes dette i (9) fås

$$C = -\frac{2\pi h}{m}, \tag{15}$$

som indsat i (8) giver, idet (4) benyttes

$$\langle\omega\rangle = \frac{2\pi}{h}\left(E_{n+1}-E_n\right), \tag{16}$$

q.e.d.

Det er således morsomt at se, hvor langt man kan komme med denne simple klassiske atommodel, som altså ikke alene beskriver, hvordan fotonen fødes som en polykromatisk bølgepakke, der er adskillige cm lang, men også giver en simpel forklaring på Bohr's postulat.

I den klassiske model er banerne cirkelformede og derfor plane. Da elektromagnetiske bølger er transversale, vil de blive udsendt vinkelret på det baneplan, den pågældende elektron i atomet tilfældigvis har. Den klassiske model vil således forudsige, at der udsendes elektromagnetisk stråling i begge retninger vinkelret på baneplanet. Der udsendes imidlertid kun energien $\hbar\langle\omega\rangle$ ved en elektron overgang fra et niveau til et andet, så der kan kun dannes en foton. Den må derfor enten sendes ud i den ene eller den anden af de to mulige retninger. Problemet er helt analogt til, hvad der sker, når fotonen møder en glasoverflade. Der er to muligheder, enten løber den ind i glasset eller også reflekteres den fra overfladen. Det kan ikke forudberegnes. Man kan beregne, at omkring 4% af en fotonstrøm vil reflekteres og 96% transmitteres, men hvad den enkelte foton "beslutter sig til", kan ikke forudsiges. Det er netop kernen i kvantemekanikkken, at de enkelte kvanters bevægelse er uforudsigelig.

Referencer

1. J. Broe og O. Keller, "Om fotonen, dens fødsel og mulige rumlige lokalisering", DOPS-NYT **15**(1), 13-19 (2000).

Om forfatteren

Torben Skettrup er Docent ved Danmarks Tekniske Universitet. Ud-dannet civilingeniør (1964) og lich. tech. (1970) ved DTU. Har i mange år undervist og forsket i ulineær optik, senest arbejdet med kvasi-fasetil-pasning i ulineære optiske processor som f.eks. anden-harmonisk genere-ring og optisk parametrisk oscillation. Torben Skettrup modtog i 1995 DOPS seniorpris for sin indsats som forsker, pædagog og underviser i optik.